チュートリアル

量子力学と情報処理(IV)

丸山 耕司

1 量子コヒーレント制御

第1回から前回の第3回まで，情報の保持，処理の舞台となるのは，常に物理的実在であること，そして我々が制御できる究極の微小情報キャリアとして量子力学的な系があることを見てきた．量子系に情報を担わせた場合，古典力学とは異なる帰結をもたらす量子力学的物理法則のために，古典情報処理とは異なる情報処理の可能性が開けてくるのであった．

情報処理が常に物理的実在を利用しているということは，物理法則という強い制約を避けては通れないということである．この強い制約の下で所望の処理の実行を目指すわけだが，これは量子情報処理だけが掲げるゴールではない．量子系を自在に制御することは，物質とエネルギーを自在に操ることにつながり，多くの分野での限りない応用の可能性を秘めている．たとえば，光エネルギーを使って空気中の二酸化炭素を回収・分解し，炭素を何かしら別の炭素化合物として留めておければ，温暖化ガスの抑制に即座に利用できる．人工光合成はまだ夢物語に近いらしいが(量子コンピューターも？)，有用な化学反応の中には，すでに量子力学的な制御の対象として研究されているものも少なくない[1]．複雑な化学反応も個々の素過程を見てみれば，どれも量子力学に従った過程に外ならない．

工学的な方面での応用としては，量子レベルでの精密測定技術をあげることができる．どんな物理量でも，原理的には量子力学に由来する不確定性で許される精度で測定できるはずだ．しかし，そのためには測定系が量子力学的な領域で測定者の意のままに機能し，被測定系とコヒーレントな相互作用をして，最終的に正確な測定結果を測定者に返す必要がある．この場合の測定系も，量子的な制御の対象となる．

量子制御の対象や目的・方法は千差万別で，「何をどうするのか」と問われても一概には答えられない．それでも，量子情報処理も含めて多くの問題は，「任意の最終状態，あるいは任意のユニタリー変換をいかに正確に実現するか」に帰着できる．今回は，前回とは違う視点からこの問題を考え，特に，フィードバックを伴わないオープンループ(量子)制御の数理を紹介する．

イメージを具体的にするために，制御の対象となる系のハミルトニアンを H_0 とし，これに‘外場’と系の相互作用を加える．さらに，量子計算を念頭におき，被制御系を N qubit からなるもの(2^N 次元の Hilbert 空間に対応)としよう．外場はたいていの場合，系の一部または全部に作用させる電磁場である．NMR ならラジオ波領域の電磁波だし，イオントラップならレーザーや磁場，量子ドット中の電子スピンならさらに(静)電場なども制御手段としての外場となる．これらを時間的に変化させるわけだが，系と外場の相互作用を表す(時間に依存しない)ハミルトニアンの組を $\{H_C^{(1)}, \cdots, H_C^{(M)}\}$ とし，外場の強さ $\{f_1(t), \cdots,$

まるやま こうじ．(独)理化学研究所基幹研究所．

$f_M(t)\}$ を時間的に変化させると考えよう．全ハミルトニアンは

$$H[\vec{f}(t)] = H_0 + \sum_{j=1}^{M} f_j(t) H_C{}^{(j)} \qquad (1)$$

となる．$\vec{f}(t)$ は $\{f_1(t), \cdots, f_M(t)\}$ を略記したものである．ここで，$\{H_C{}^{(j)}\}$ がすべての qubit に対する個別の操作やすべての 2 qubit 間の相互作用など，全系制御に必要なすべての要素を陽に含んでいれば，当然制御可能性など問題にならない．しかし，様々な物理的・技術的制約から制御可能な物理量が限られる場合がある．そんな場合も含めて，量子系が制御可能であるかをみるのが目的なので，$\{H_C{}^{(j)}\}$ としては小さい集合をイメージしよう．

ところで，式(1)では外場の強さ $\vec{f}(t)$ は連続変数として自由に変化させることができるとしているが，これらは量子化する必要はないのだろうか．もちろん，全てを量子化して扱うこともできるが，そうすると外場の制御さえも量子制御となり，我々が直接扱うマクロな機器や古典情報とのインターフェースが別途必要となる．つまり，どこかの段階でマクロな古典系のパラメータに相当する変数がハミルトニアンに含まれなければならない．幸いにも，実際にはそこまで神経質になる必要はほとんどなく，外場は古典的なものとして扱って差し支えない．環境としての電磁場の量子性が露わになるのは，真空のゆらぎが励起状態にある電子に対して引き起こす自発放射など，ここで考える電磁場と量子系との相互作用とはケタ違いに弱い場合だけだからである．

2 制御可能性

ハミルトニアン(1)が決まれば，時間発展演算子は次の Schrödinger 方程式を満たす：

$$i\frac{d}{dt}U(t) = H[\vec{f}(t)]U(t), \qquad U(0) = I. \qquad (2)$$

I は恒等写像である．さて，ここで最大の問題は，制御パラメータ $\vec{f}(t)$ をうまく選べば任意のユニタリー変換 $U \in U(2^N)$ が有限の時間で実現されるのかどうか，である．

式(2)のもとでの制御可能性は，与えられたハミルトニアンで張ることのできる Lie 代数で論じられる．Lie 代数って何だっけ，と思っても心配はいらない．定義だけ見てもいまひとつ味気ないが[†1]，量子制御に関する限り，だいたいいつもハミルトニアン(のなす代数的構造)のことだ．ハミルトニアン H が状態 $|\psi\rangle$ の微小時間発展 $|\psi(\delta t)\rangle = U(\delta t)|\psi(0)\rangle = (I - iH\delta t)|\psi(0)\rangle$ を与え，これを積分すると時間発展演算子としての様々なユニタリー変換

$$U(t) = \mathcal{T} \exp\left(-i\int_0^t H[\vec{f}(t)]dt\right) \quad (3)$$

が得られる．これがまさに Lie 代数と Lie 群[†2]の関係である．式(3)で，$\mathcal{T}$ は time-ordering operator で，$\mathcal{T}$ が作用する演算子が，異なる時刻におけるものの積であるとき，時刻 t の小さいもの(古いもの)ほど右に来るように並べることを意味する．

群論の言葉では，ここでいう H のことを生成子(generator)とよび，微小変換を作るときの恒等変換 I からのずれを示すベクトルに対応する．生成子の組 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ が与えられたとき，その要素同士の交換子積を繰り返しとることで得られる Lie 代数を，“$\{g_1, \cdots, g_n\}$ から生成される Lie 代数”とよぶ．これが任意の微小変換を表すのに必

---

†1 Lie 代数 $\mathcal{L}$ とは，複素数体$\mathbf{C}$上のベクトル空間であり，ふたつの要素 x, y に対して以下の性質をもつブラケット積$[\cdot,\cdot]: \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ が定義されたものをいう：$[\alpha x+\beta y, z]=\alpha[x, z]+\beta[y, z]$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{C})$, $[x, y]=-[y, x]$，および $[[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y]=0$ (Jacobi identity)．我々が興味あるのは，ブラケット積が交換子積 $[x, y]=xy-yx$ として定義された，複素数体上の反エルミート演算子 $\{iH_m\}$ のなす線形 Lie 代数 $\mathrm{u}(2^N)$ あるいは $\mathrm{su}(2^N)$ である．反エルミート演算子とは，エルミート共役†をとると，$A^\dagger=-A$ のように符号が反転する演算子のことである．ちなみに，行列 A のエルミート共役は数学では A^* と表記することが多いようだ．

†2 Lie 群の教科書的定義は次の通りである．群構造をもつ可微分多様体で，$\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への写像 $(x, y)\mapsto xy$ と，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への写像 $x\mapsto x^{-1}$ が微分可能であるもの．

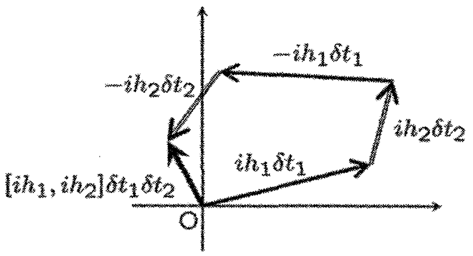

図1　式(4)を表す概念図
ハミルトニアン ih_1, ih_2, $-ih_1$, $-ih_2$ による連続する4つの微小変換はハミルトニアン $[ih_1, ih_2]$ によるひとつの微小変換に等しい．原点(O)は恒等変換 I に対応する．生成されるLie群のなす空間(多様体)は一般には'平坦'ではなく，符号が逆で始点の異なるベクトル(ハミルトニアン)は互いに反平行とはならない．

要なベクトルの組を表すのだから，$\{g_1, \cdots, g_n\}$ から生成されたLie代数(ベクトル空間)の次元が $\{g_1, \cdots, g_n\}$ から作られるLie群の次元を決定する．

生成子としてハミルトニアンの組 $\{ih_1, \cdots, ih_n\}$ をとろう(i をかけているのはすべてを反エルミート演算子にして，記述をスマートにするためである)．考えている物理系に対応するHilbert空間の次元 D が有限であれば，この上のLie代数はどうがんばっても $\mathrm{u}(D)$ の部分代数だから†3，有限回数の交換子積をとる作業で，線形独立なハミルトニアンはすべてそろう．直感的には，ih_1 と ih_2 をふたつの線形独立なハミルトニアン，$U_j(\delta t_j)=e^{-ih_j\delta t_j}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&U_2^{-1}(\delta t_2)U_1^{-1}(\delta t_1)U_2(\delta t_2)U_1(\delta t_1)\\
&\quad\simeq I-[ih_1, ih_2]\delta t_1\delta t_2\\
&\quad\simeq e^{-[ih_1, ih_2]\delta t_1\delta t_2} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となるから，実質的に $[ih_1, ih_2]$ も手持ちのハミルトニアンとみなせるわけだ(**図1**)．この意味で，$[ih_1, ih_2]$ は ih_1 と ih_2 から生成されるLie代数の中に含まれる．

さて，式(1)での $\{iH_0, iH_C^{(1)}, iH_C^{(2)}, \cdots\}$ のよう利用可能なハミルトニアンの組と制御パラメータの組 $\vec{f}(t)$ が与えられて，Schrödinger方程式(2)に従って $U(t)(=U(t;\vec{f}))$ が作られるとき，有限時間で実現可能な $U(t)$ はどんな集合をなすのか．その集合が，$\mathrm{U}(2^N)$ あるいは $\mathrm{SU}(2^N)$ と一致すれば，完全に制御可能であるということになる．次の定理が簡潔に答えを教えてくれる[2]：

ハミルトニアンの組 $\{ih_m\}$ が与えられたとき，実現可能なユニタリー変換の集合は，$\{ih_m\}$ から生成されるLie代数 $\mathcal{L}$ が作る(連結)Lie群 $e^{\mathcal{L}}$ に等しい．

利用可能なハミルトニアンの組($\{iH_0, iH_C^{(1)}, iH_C^{(2)}, \cdots\}$ など)から生成されるLie代数 $\mathcal{L}$ のことを特にdynamical Lie代数とよぶ．$e^{\mathcal{L}}$ は，$\mathcal{L}$ の要素から得られるLie群の要素全体，つまり $e^{\mathcal{L}}:=\{e^{A_1t_1}e^{A_2t_2}\cdots e^{A_nt_n}|A_m\in\mathcal{L}, t_m>0(\forall m)\}$ を指す．

もし $\mathcal{L}=\mathrm{u}(2^N)$，つまり $e^{\mathcal{L}}=\mathrm{U}(2^N)$ であれば，全系(N qubit)が制御可能であるという．我々は量子情報処理を念頭においているので，密度演算子 ρ を $\rho'=U\rho U^\dagger$ に変換できればよい．したがって，系全体にかかる位相因子までは考慮する必要はなく，$\mathcal{L}=\mathrm{su}(2^N)$，あるいは $e^{\mathcal{L}}=\mathrm{SU}(2^N)$，であれば制御可能といって差し支えない．

もっとも基本的な例として，Pauli演算子 $\{\mathrm{i}\sigma_x, \mathrm{i}\sigma_y\}$ から生成されるLie代数 $\{i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$ がある．このLie代数の次元は3で，$\mathrm{su}(2)$ の次元と等しい．物理的には，ひとつのスピン1/2粒子に対して，直交する2方向の磁場を制御(変調)できれば，このスピン状態は完全に制御可能である，ということになる．任意の回転操作($\mathrm{SU}(2)$)のオイラー分解は，まさしく2軸のまわりの回転への分解だったことを思い出そう．

ところで前回，N qubitからなる系に対する任意のユニタリー変換 U は，(N によらず)単一qubitに対する操作と2 qubitに対するCNOTゲートを適宜組み合わせることで実現できると書いた．今回のLie代数をもとにした記述と多少のギャップが感じられるかもしれないが，上述の「全

†3　$\mathrm{u}(N)$ とは，$N\times N$ の反エルミート(複素)行列全体が作るLie代数のこと．さらに，反エルミート性のほかにトレースがゼロであること($\mathrm{Tr}\,A=0$)が条件に加わると，得られる代数は $\mathrm{su}(N)$ とよばれる．

系が制御可能」であることを，別の言葉で表現しているに過ぎない．この場合，利用可能なハミルトニアンとして，各 qubit に対する $\{i\sigma_x, i\sigma_y\}$ と，さらに任意の qubit 対に対する CNOT を生成するハミルトニアン ih_{CNOT} が与えられていることになる[†4]．今回述べた定理は，これらのハミルトニアンの交換子積を繰り返しとっていくと，いずれ $su(2^N)$ と等しくなる，ということを言っているわけだ．前回も書いたように，ih_{CNOT} の代わりに，ふたつの qubit をエンタングルさせるユニタリー変換 V を生成するハミルトニアン ih_V を用いても同じことである．

3 スピンチェイン制御

多数のスピン 1/2 粒子が相互作用し合う系は，qubit の集団の表現として便利なだけでなく，実際に量子コンピュータの候補物理系の多くで本質的に重要なモデルとなっている(前回記事を参照)．そこで，スピン 1/2 粒子からなる系の制御に関する最近の結果を紹介しよう．任意の単一スピン操作と，任意のスピン対に対する(選択的)CNOT が実行できれば，いかなるユニタリー変換も実行できることは分かっているが，このままでは(理論としては)おもしろくない．それだけではなく，スピン系として記述できる物理系では，スピン間相互作用を自由にスイッチングすることは，ふつうできない(なんとかスイッチングしようという研究はある)．つまり相互作用するスピン同士は相互作用しっぱなしなのだ．前回の図 3 を見れば，CNOT 実現においてこれが大問題であることが分かるだろう．

また，個々のスピンすべてと，すべての 2 スピン間相互作用を制御できる状態であることは，それだけ制御エラーやノイズの影響も受けやすいということだ．量子誤り訂正を実践しようにも，qubit 数が増える上に，シンドローム測定(codeword に対応する部分空間への射影．第 2 回参照)などのために構成が複雑になり，現実には非常に難しい．

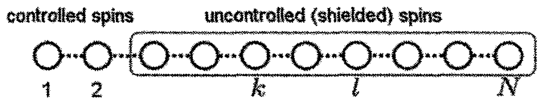

図 2 1 次元スピンチェイン
白丸がスピン 1/2 粒子，点線が(隣接)スピン間の相互作用を表す．相互作用が Heisenberg 型の場合，いちばん端のスピン 1 に加わる磁場だけを制御すれば全スピンを制御可能である．XX 型の場合は，制御対象を端のふたつ(スピン 1 と 2)にすれば，同様に全系制御可能である(本文参照)．

では，ごく一部のスピンへのアクセスだけで，N 個のスピン 1/2 からなる系(2^N 次元 Hilbert 空間)を制御できるだろうか．手元の 2, 3 のボタンやレバーだけで巨大ロボットを自在に操縦するようなイメージだろうか．アクセス可能な一部分以外のすべてのスピンを，外界との相互作用から完全に遮断したモデルと考えることもできる．

問題をわかりやすくするために，N 個のスピン 1/2 粒子は 1 次元のチェインをなすように配列され，隣り合うスピン同士のみが相互作用するとしよう(**図 2**)．そして，いちばん端のスピンに作用する磁場を制御できるとする．つまり，式(1)に相当するハミルトニアンが，

$$H(t) = -J\sum_{j=1}^{N-1} \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_{j+1} + \mu\vec{B}(t)\cdot\vec{\sigma}_1 \quad (5)$$

と書けるわけだ(J，μ は定数)．このハミルトニアンによる制御可能性については，上の Lie 代数の議論がそのまま適用できて，dynamical Lie 代数の次元は $2^{2N}-1$ に等しくなる．やる気と時間のある方には，このことを $N=2$ や $N=3$ などの場合で確認することをお勧めする($N\geq 3$ のケースは帰納的に示せる)．したがって，いちばん端のスピンに印加する磁場の強さ $\vec{B}(t)$ を変調するだけで，$SU(2^N)$ 群の任意の操作を実現することができるのだ．

では，$\vec{B}(t)$ を具体的にどう制御すればいいのだろうか．残念ながら，これらの関数形を解析的に導く方法は現在のところ知られていない．もち

†4 ih_{CNOT} はどんな形をしているだろうか？

ろん，数値的方法[3]はあるが，得られる‘最適解’が本当に最適かどうかは分からず，(特に式(5)のようなHeisenbergタイプの相互作用の場合)計算時間がスピンの数に対して多項式でないため(直接扱うべきHilbert空間の次元が2^N)，効率がよくない．

ところが，スピン相互作用の形を$\vec{\sigma}_j\cdot\vec{\sigma}_{j+1}$の代わりに，$\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x+\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y$とすると問題がずっと扱いやすくなる．$\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z$の項を落としたこの形は，XXモデルとよばれるものの一例である(XYモデルとよぶ場合もある)．なぜ扱いやすくなるかというと，XX型のスピンチェインの状態は，Jordan-Wigner変換

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sigma_n{}^+\left(\prod_{m<n}\sigma_m{}^z\right) \\
a_n{}^\dagger &= \left(\prod_{m<n}\sigma_m{}^z\right)\sigma_n{}^-
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

によって，「相互作用をしない」(スピンゼロの)フェルミオンの状態へと変換されるからである(a, $a^\dagger$が逆に定義される場合もあるが本質的には同じである)[4]．ちなみに，Heisenbergモデルは同じ変換で，「相互作用をする」フェルミオンに写像される．ここで，a_j, $a_j{}^\dagger$はフェルミオンの正準(反)交換関係($\{a_j, a_{j'}\}=\{a_j{}^\dagger, a_{j'}{}^\dagger\}=0$, $\{a_j, a_{j'}{}^\dagger\}=\delta_{j,j'}$)を満たす消滅，生成演算子，$\sigma_j{}^\pm=(\sigma_j{}^x\pm i\sigma_j{}^y)/2$は昇降演算子である．式(6)から分かるように，サイトn以外のすべてのスピンが$|\uparrow\rangle$で，サイトnだけが$|\downarrow\rangle$である状態$|\uparrow\cdots\downarrow_n\cdots\uparrow\rangle=a_n{}^\dagger|\uparrow\cdots\uparrow\rangle$は，フェルミオンがただひとつサイト$n$に局在した状態である．複数のフェルミオンがチェイン中に存在する場合は，通常の$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$によるスピン表示とJordan-Wigner表示(フェルミオンの個数基底による表示)を行き来する際に，$\prod_m\sigma_m{}^z$による位相因子に注意が必要である．

Jordan-Wigner変換(6)によって，XXモデルのハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H &= -J\sum_{j=1}^{N-1}(\sigma_j{}^x\sigma_{j+1}^x+\sigma_j{}^y\sigma_{j+1}^y) \\
&= -2J\sum_{j=1}^{N-1}(a_j{}^\dagger a_{j+1}+a_{j+1}^\dagger a_j) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となる．

XXモデルではハミルトニアン(7)とチェイン内スピンのz成分の和$S^z=(1/2)\sum_{j=1}^N\sigma_j{}^z=\sum_{j=1}^N(1/2-a_j{}^\dagger a_j)$は交換する(可換である)：$[H, S^z]=0$．つまり，$S^z$の大きさ，フェルミオンの総数($\sum_j a_j{}^\dagger a_j$)は共に保存される．HeisenbergモデルでもS^zは保存されるが，XXモデルではフェルミオン同士が相互作用しないので，単一フェルミオンの振る舞いが完全に分かれば(固有状態，固有値がすべて分かれば)あとはフェルミオンがいくつあろうと，それぞれの重ね合わせで表わされるという単純さがあるのだ．N個のスピンからなる1次元チェインでは，N個の固有状態で1つのフェルミオンが存在する状態を完全に表せるので，計算はだいぶ楽になる．

扱いやすいモデルである代償(？)は，XXハミルトニアン(7)と$\vec{\sigma}_1$だけでは$\mathrm{su}(2^N)$全体を生成できないことだ．しかし，式(7)のHと，端のスピンにかけるz方向の磁場$B_z(t)\sigma_1{}^z$だけで，任意の二点k, l間のフェルミオンを交換($k\leftrightarrow l$)する演算子は生成できる[5]．ということは，$B_z(t)$をうまく変調すれば，サイト1とサイトkのスピンを交換したり，サイト2とサイトlのスピン状態を交換したりすることができるわけだ[†5]．ところで，この交換操作は，厳密にはいわゆるSWAP操作とは若干異なるので，以下，$\widetilde{\mathrm{SWAP}}_{kl}$のように表記することにする(前回の式(4)の行列とは，行列要素の位相に若干の違いがある)．添え字klが交換の対象となるサイトを表す．

任意のサイトの単一スピンの制御はこれで簡単に実現できる．サイト1に移動させたスピン状態に任意のSU(2)操作を加え，またもとのサイト

†5 本当は，‘(Jordan-Wigner表示での)フェルミオン’を交換するのだが，以下，直感的に分かりやすいように‘スピン’で統一する．サイト1,2で加える‘スピンに対する操作’と整合をとるためである．

に戻してやればいい．さらに，**図2**のように，制御対象となるスピンを端のふたつのスピン(サイト1と2)にして，ここでたとえばCNOTを実行して，これらをもとのサイト k と l に戻せば，実質的にサイト k, l のスピン間にCNOTを実行したことになる．これで任意の $\mathrm{SU}(2^N)$ 操作が可能になることは，前回説明したとおりである．

もちろん，式(5)のハミルトニアンだけではサイト1と2の間でCNOTを実現することはできないから，新たにサイト2に磁場をかける必要がある(式(5)に $\mu\vec{B}'(t)\cdot\vec{\sigma}_2$ を加える)．サイト1での y 方向の磁場 $B_y(t)$ を制御すれば，$[iH, i\sigma_1{}^y]=-2i\sigma_1{}^z\sigma_2{}^x$ だから，$\exp(-i\sigma_1{}^z\sigma_2{}^x t)$ が実現できる．これをサイト2へのHadamardゲート H_2 ではさめば，$H_2\exp(-i\sigma_1{}^z\sigma_2{}^x t)H_2=\exp(-i\sigma_1{}^z H_2\sigma_2{}^x H_2 t)=\exp(-i\sigma_1{}^z\sigma_2{}^z t)$ となって，分解

$$U_{\mathrm{CZ}}=\exp(-i\sigma_1{}^z\sigma_2{}^z\pi/4)\exp(-i\sigma_1{}^z\pi/4)\exp(-i\sigma_2{}^z\pi/4) \tag{8}$$

に従って，CZが構成できるからである．CZによるCNOTの構成が容易であることは前回みた．単一スピンへの操作を，スピンチェインのダイナミクスの時間スケール($\sim 1/J$)よりずっと速くすれば(磁場を十分強くすれば)，サイト3から N までのスピンの状態が時間発展する前にCNOTゲート実行を完了できる．

磁場 $\vec{B}(t)$ を具体的にどう変調するかについては，最適制御理論[3]で知られている数値的な方法が，ここでは効率的である．N 個のスピンからなるチェイン中にひとつだけ $|\uparrow\rangle$ がある状態は，(2^N 次元のうちの)わずか N 次元の部分空間を張るので，この小さな部分空間の中で $\widetilde{\mathrm{SWAP}}_{kl}$ を生む $\vec{B}_{(kl)}(t)$ を求めておけばよい．XXモデルの恩恵により，他のスピンの状態によらず，この $\vec{B}_{(kl)}(t)$ が使えるからだ．2^N 次元空間の中での最適化を行うより，計算ははるかに効率的に行える．そして，$\widetilde{\mathrm{SWAP}}_{kl}$ をスピン系で実行するのに要する時間は $O(N^2)$ で済むことが見出されている．

以上のようにして，前回述べた任意のユニタリー変換の分解と，今回のLie代数をもとにした制御可能性についての定理を合わせて用いることで，1次元スピンチェイン全体が，ふたつのスピンへのアクセスだけで，効率よくフルに制御可能であることが言えるわけだ．

しかし，今まで述べたスピンチェイン制御法は，実はそのままでは機能しない．というのは，Jordan-Wigner表示で得られる2サイト k, l 間のスピン状態を交換する操作 $\widetilde{\mathrm{SWAP}}_{kl}$ を，もとの通常の表示 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ に戻って表すと，2サイトにはさまれたスピンたちの状態によって $\prod_{k<j<l}\sigma_j^z$ という演算子がかかってしまうのだ．サイト k, l のスピン状態は，ほとんどいつも $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ の重ね合わせであるか，ほかのスピンとエンタングルした状態だ．$\prod_{k<j<l}\sigma_j^z$ の効果は(CNOTの場合のフリップのように)サイト k, l の状態に依存した形で現れるので，チェイン端部へのアクセスだけでこれを打ち消すことはできない．

この問題を解決するひとつの方法は，スピンふたつでqubitを表現することだ．物理的な2次元の自由度とqubitを一致させないことを明確にするために，こんな場合のqubitは論理(logical) qubitとよばれる．ここでの解決法は，2スピン状態 $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$ を論理qubit $\{|0\rangle_L, |1\rangle_L\}$ として使うものだ．こうすると，1つの論理qubitに含まれる $|\uparrow\rangle$ の数は常に一定なので，$\prod_{k<j<l}\sigma_j^z$ の効果はいつも把握できる．テクニカルな詳細は文献[5]に譲るが，基本的アイデアはすべて上で説明したとおりである．

さて，最後に関連するトピックをひとつ．実際にスピンチェインに相当する物理系を実験室で作成したとしても，端部の1つないし2つのスピンにしかアクセスできないなら，残りの「隠された」領域のスピンチェインが設計通りに実現できているかも分からないことになる．つまり，スピン間結合定数 J が場所によって異なる場合，限られたアクセスでこれを正確に測定することはできるのだろうか．ハミルトニアンの詳細が分からなければ，正確な制御などできないから，これは

重要なタスクである.

この問題については，1次元チェイン[6]のみならず，2次元以上のスピンネットワーク[7]に関しても肯定的結果が得られている(2次元以上の場合は当然，アクセス可能なスピンの数を増やす必要がある). 基本的なアイデアは，まず全スピンを$|\downarrow\rangle$にしておいて(これはNについての多項式時間で可能)，アクセス可能領域でひとつを$|\uparrow\rangle$にする. すると，この上向きスピンはネットワーク内へ拡散していき，いずれ元のサイトに帰ってくる. アクセス可能領域でスピンを再び$|\uparrow\rangle$に見出す確率を時間の関数としてプロットすれば，この中には全結合定数の情報が入っていることなり，あとはいかにそれらの情報を抽出するか，という問題になる. すべての作業はNに関して多項式時間で可能であることが示される.

4 まとめ

今回は，量子系の制御可能性について，Lie代数を用いた議論を説明し，その応用例としてスピンチェインの制御についての最近の結果を紹介した. 毎日唱えて記憶にとどめていただきたいのは，与えられたハミルトニアンから生成されるdynamical Lie代数が実現可能なユニタリー変換の集合を決める，ということである. その応用例として，多数のスピン(qubit)のなす系のごく一部を制御すれば，全スピン状態の張る巨大な(2^N次元の)Hilbert空間内で任意のユニタリー変換が実現できる，すなわち量子計算が実行できることを説明した. Lie代数という抽象的な数学から，量子多体系の制御，量子計算のダイナミックな世界が論じられる面白さを少しでも感じていただければ幸いである(そもそもLie代数がダイナミックな数学だからなのだが).

ここでは扱わなかったが，系と外界との相互作用が無視できない(散逸がある)場合や，制御の要素として「観測」も含めて，観測結果によってそれに続く制御のパラメータを変化させる場合なども，当然，量子制御理論の範疇に含まれる. 前者の散逸がある場合については，(今回説明したような)オープンループ制御では実質的に制御不可能であることが示されている[8]. 後者の観測結果を制御シークエンスに反映させるクローズドループ制御(量子フィードバック制御ともいう)は，散逸がある場合には特にオープンループ制御よりも効果的であることが分かっている[9]. 観測として射影測定をしてしまっては，初期状態からの履歴に関する情報も一気に失われてしまうので，制御どころではなくなってしまう. 量子フィードバック制御で言う観測とは，系についての確定的な情報を獲得しない代わりに，系への反動を抑える「弱い観測」のことだ. 数学的には一般に(第2回の脚注3で触れた)POVMによる測定でモデル化される. 課題としては，時間発展が非線形になってしまうこと，実装が難しいことなどが挙げられる.

全4回にわたって，量子情報・量子計算とよばれる分野について解説をさせていただいたが，なにせ今やあまりにも巨大な分野なので，紹介できたのはほんの一部分にすぎない. また，「あれもこれも書かねば」という誘惑と戦いながらの作業だったので，もう少しテーマを絞るべきだったか，などと反省する部分も多い. ただ，その分，読んでくださった方にとって，興味のとっかかりがどこかにひとつでも見つかるようであったなら，本稿の目的は(個人的には)十二分に達せられたと思う. お付き合いいただき，どうもありがとうございました.

参考文献

[1] Rabitz, H., de Vivie-Riedle, R., Motzkus, M. and Kompa K., Science, 288(2000), 824.
[2] D'Alessandro, D., Introduction to Quantum Control and Dynamics, Taylor and Francis, 2008.
[3] Krotov, V. F., Global methods in optimal control theory, Marcel Dekker Inc., 1995; Sklarz, S. E. and Tannor, D., Phys. Rev. A66(2002), 053619; Schulte-Herbrueggen, T. et al., Phys. Rev. A, 72(2005)042331.
[4] たとえば，Sachdev, S., Quantum Phase Transitions, Cambridge University Press, 1999のSection 4.2.

[5] Burgarth, D., Maruyama, K., Murphy, M., Montangero, S., Calarco, T., Nori, F. and Plenio, M. B., eprint arXiv : 0905. 3373.

[6] Burgarth, D., Maruyama, K. and Nori, F., Phys. Rev.A, 79 (2009), 020305 (R); Franco, C. D., Paternostro, M. and Kim, M. S., Phys, Rev. Lett. 102 (2009), 187203.

[7] Burgarth, D. and Maruyama, K., New J. Phys. 11 (2009), 103019.

[8] Solomon, A. I. and Schirmer, S. G., Group 24 : Physical and Mathematical Aspects of Symmetry, IOP Conference Series 173 (2003), 485 (or eprint arXiv : quantph/0211027).

[9] たとえば, Wiseman, H. W., Phys. Rev. A, 49 (1994), 2133; Ahn, C., Wiseman, H. W. and Milburn, G. J., Phys. Rev. A, 67 (2003), 052310.