悪魔が操る情報の物理 *

丸山　耕司
大阪市立大学大学院理学研究科

I.　悪魔的パラドックス

映画「マトリックス」では，人間が知覚するすべての情報は，実はコンピュータが作り出して脳に送られていたものだ，とする世界が描かれた．実際，我々が見聞きすることのできる物理現象は，すべて脳が信号として処理・認識していることである．ということは究極的にはこの世界も情報が現実で，物質はある種仮想的なものなのではないだろうか．いきなりそこまで飛躍しないにしても，現実的な「物の理」を記述する物理学と，抽象的な概念である情報との間にはどんなつながりがあるのだろうか．近年の量子情報科学の隆盛を筆頭に，物理現象を情報を通して理解する，あるいは情報処理を物理法則のもとで論じるといった研究が盛んである．本稿では，そうした流れの源流にある「Maxwell の悪魔のパラドックス」とその解決を中心に，物理と情報の結びつきのほんの一端を紹介したい．

まず，情報の基本的な定量化法を復習しておこう．情報とは，それを知ることに意味や価値のあること，驚きのあること，である．そして，その価値や驚きが大きい (出現確率が低い) ほど，情報の量も大きいと考える．すると，情報量は，その情報が現れる確率の単調減少 (連続) 関数と見てよさそうだ．さらに，情報量は加法的，つまり，A，B というふたつの独立な情報がもたらされたときの全情報量は，それぞれの情報量の和であるはずだ．情報量を I で表せば，$I(A,B)=I(A)+I(B)$ となる．一方，確率については，$p(A,B)=p(A)p(B)$ であるので，I の関数形としてふさわしいものとして log があることがすぐに分かる (実際，これが上の要請下の唯一の関数形である)．そこで，確率 p で現れる情報のもつ情報量は，$I=-\log_2 p$ と定義する．対数の底の 2 は，定数係数分の不定性をなくしつつ，もっとも基本的な二値情報を基準とするためである．

さて，ある確率変数 X をひとつずつ独立に生成する情報源 $\mathcal{X}$ を考える．確率変数 X が有限個の $x_i(i\in\{1,2,...,N\})$ からなり，各々の x_i が現れる確率が常に p_i で表されるとき，各 x_i がもつ情報量 $-\log p_i$ の平均

$$H(X):=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log_2 p_i \tag{1}$$

を，この情報源のもつ (**Shannon**) **エントロピー**とよぶことにする．単位は**ビット**である．これを $H(p_i)$ とか $H(\{p_i\})$ などと表記することもある．ここで，ある j について $p_j=0$ となる場合は，$0\log 0$ が現れるが，これは極限の値を採用してゼロと定義する．二値情報の場合，どちらかの確率が 1 でもう片方が 0 の場合は $H=0$，どちらの現れる確率も 1/2 の場合は $H=1$ となって最大値をとる．エントロピー H が大きいほど，次に現れる情報についての不確定さが大きく，その情報を得たときの価値が高いことになる．

物理の話に戻ろう．情報という言葉が物理の中で語られる場面は，もちろん他にもある [21]．しかし，Maxewell の悪魔のパラドックス [1] は，その解決に定量的な意味での情報の概念が必要だったという意味で，情報の果たす役割の明確さが際立つ例である．19 世紀半ば，J. C. Maxwell は，もし個々の気体分子の状態を観測できる存在 (悪魔) がいれば，温度一定の気体を高温部と低温部に分離することができ，熱力学第 2 法則が破られる可能性を示した．何らかの（人為的）操作が許されるなら，第 2 法則は破られてもよいのだろうか．

この有名なパラドックスを，初めて情報 (量) と関連づけてとらえて解決を試みたのは，20 世紀初めの Szilard(“シラード”が近い発音らしい) である．彼は，図 1 のような，分子がひとつだけからなる “気体”の入った体積 V の箱を考えた．初め，図で (a) の状態では分子が箱の中のどこをどう運動しているかは分からない．ここで，薄い壁をさっと挿入し，箱の体積を二等分する．観測者 (=悪魔) は，分子の運動状態を変えることなく，分子が壁の右側にあるか左側にあるかだけを測定する (図 1(b))．ここでは右側にあったとしよう．観測者は挿入した壁の右側におもりを結びつけ，箱を温度 T の熱浴に接触させ，この一分子気体を体積 V まで等温膨張させる．この膨張過程 (図 1(b) → (c) → (d)) で，気体は熱浴から熱量 Q を受け取り，おもりに対し，

$$W=kT\int_{\frac{V}{2}}^{V}V^{-1}dV=kT\ln 2 \tag{2}$$

だけの仕事を行う (k は Boltzmann 定数) [2]．等温過程であるから，$W=Q$ である．気体は再び体積 V を占める状態になるわけだから，もとの状態 (図 1(a)) に戻った，つまり熱機関としてサイクルが閉じたことになる．ところが，この熱機関は熱浴からの熱量 Q を力学的仕事 W に 100% の効率で変換しており，明らかに熱力学第 2 法則を破っている．（熱力学的な）エントロピー収支で見れば，エンジンは完全に元の状態に戻るから変化なし，熱浴は熱 Q をエンジンに与えているので $Q/T=k\ln 2$ だけ下がっている．これが Szilard エンジンによる Maxwell の悪魔の表現である．

第 2 法則が破られないために必要であろう仕事 W の消費理由 (エントロピー $k\ln 2$ の増加理由) について，Szilard は図 1(b) での情報取得 (観測) にあると考えた．そして，$k\ln 2$ というエントロピー変化量をこの情報取得に関連した基本的量であるとした [3]．定数係数は別として，これはまさに先に導入した 1 ビットの情報量に対応する量である．その意味づけの正確さはともかく，Shannon による情報理論確立の 20 余年も前の，物理の中での情報の役割がはっきりと認識された最初の例である．

悪魔のパラドックスの解決に関しては，この後もしばらくは観測がエントロピーを増やす主犯だと信じられたようだ．その大きな拠り所となったのは，Brillouin が Szilard のアイデアをベースに試みた，観測によって生じるエント

---

* 「数理科学」Vol.50-3, pp.28-34, サイエンス社，2012. に掲載.

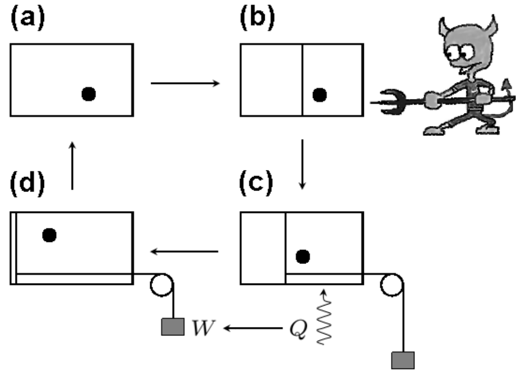

FIG. 1: Szilard が考案した一分子気体エンジンによる思考実験．分子の位置情報を得ることにより，熱力学第 2 法則を破る (ようにみえる)．

ロピー変化量の計算である．具体的には，分子運動の観測に光を用いた場合を考え，分子による光の散乱によって生じる系のエントロピー変化を計算し，これがパラドックス中のエントロピー減少を補うのに十分な量であることを示したのだ [4]．ところが，これでもまだ悪魔はしたたかに生きていた．観測に伴うエントロピー増加は原理的にいくらでも小さくできることが，後に示されることになる．

II. LANDAUER の原理

IBM の Landauer は,「計算」を実行する上での究極のエネルギー効率を研究する中で，情報処理の物理的側面を真っ向からとらえた．キーとなる事実は，すべての情報は何らかの物理的実体を媒体として保持・伝達され，すべての情報処理はそれらに直接 (物理的に) 働きかけることで実行される，ということである．であれば，すべての情報処理は媒体に物理的に働きかけて状態を変化させる，物理的な過程に対応しているはずである．

今，ある情報処理を，入力 x に対して $y = f(x)$ を出力する写像 f として表そう．この写像 f が単射である場合，つまり入力 x と出力 y が 1 対 1 に対応する場合 (例えば，NOT ゲート=ビット反転処理) は，逆写像 f^{-1} によって出力 y から元の入力 $x = f^{-1}(y)$ を一意に得ることができる．言い換えれば，ある情報処理が単射写像であるときは，その処理は “可逆” である．上で述べた対応関係を考えると，可逆な情報処理は可逆な物理的過程で実行可能であることになり，原理的にはエントロピー増加，散逸のない過程で遂行可能となる．

では，入力と出力が 1 対 1 に対応しない情報処理を考えよう．2 ビットの入力から 1 ビットの出力を得る処理 (AND や OR など) はすべてこれに相当するが，1 ビット処理でも，0 か 1 かにかかわらず出力を 0 にしてしまうような処理は 2 対 1 の対応であり，単射ではない．これを情報の消去とよぶ．情報処理を担う物理系 (レジスター，あるいはメモリー) について考えると，消去によって許される自由度が減り，エントロピーが減少，その結果，自由エネルギーが増大する．これは，正のエネルギーの消費が必要であること，その分は環境に散逸してしまうことを意味する．1 ビットの情報消去の場合は，エネルギー散逸量は $kT \ln 2$(エントロピー $k \ln 2$) となる．Landauer はこれを一般化し，不可逆な情報処理はすべて物理的には散逸を伴うと主張した (**Landauer の消去原理**[5])．逆に，可逆な処理だけで全体の情報処理を構成することができれば，(理想的には) 散逸ゼロで計算が実行できる．図 2 に一分子気体でメモリーをモデル化したときの具体的な消去プロセスの例を示す．“ 0 ”と“ 1 ”を分ける壁を引き抜いたときに気体のエントロピーが増大し (非可逆過程)，これが標準状態“ 0 ”への等温圧縮の際に熱浴へと散逸する．

Landauer の原理に対しては反論も根強くある．たとえば，情報を消去するのに，メモリーがすでに標準状態 (例えば図 2 の“ 0 ”) にあることが分かっていればそのまま何もせず，“ 1 ”の状態にあれば該当する体積 $V/2$ をゆっくり左側 (“ 0 ”側) へスライドさせればいいではないか，というものなどだ [6]．体積一定の領域をスライドさせるのに仕事は必要ないからだ．しかし，この方法だとメモリー状態の観測結果に依存した操作の履歴が外部に残ってしまう．正味の結果として，情報が消去されたことにならないのだ．したがって，メモリー状態によらず，図 2 のように，常に同じ手順で標準状態“ 0 ”へ戻さなければならない．また，図 2 のような消去過程は，逆にたどることで元のエントロピーをもつ状態に戻すことができる，したがって非可逆な情報処理が可逆な物理過程で実現されたことになる，という批判もある [7]．だが，物理系が保持していた元の情報は復元できないので，情報処理という文脈でこれを可逆な物理過程とよぶのは無理がある．

さて，同じく IBM の Bennett は Landauer の考察からもう一歩踏み込んで，観測による情報取得は原理的には可逆な物理過程で実現可能であることを示した [8]．これにより，Szilard エンジンで記述した Maxwell の悪魔のパラドックスにおいて，本質的に散逸を伴うのは悪魔による観測行為ではなく，悪魔の頭の中の記憶を消去する過程であることが確定することになる．サイクルを閉じて初期状態に戻さなければならないものの中には，物理的実体である

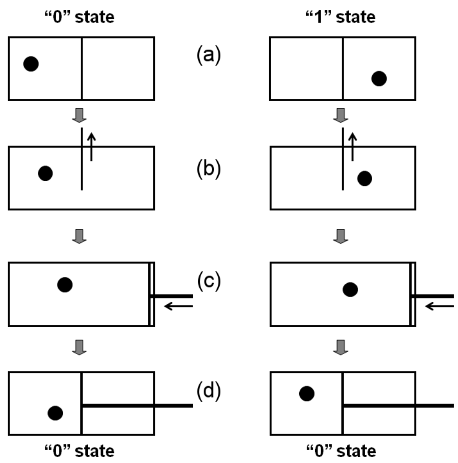

FIG. 2: 情報消去の熱力学的過程．一分子気体でメモリーをモデル化し，分子の位置（左“ 0 ”か右“ 1 ”か）で記録された二値情報を消去するには，まず中央の壁を取り払い，右側から気体を等温圧縮して体積を半分にし，標準状態“ 0 ”にする．

悪魔の頭 (メモリー) も含まれるからだ．そして，消去に必要なエネルギー消費がエンジンから得られるエネルギーを相殺するので，パラドックスは解決する．

ところで，ここに述べた論理展開だけだと，単射でない情報処理に物理的散逸が伴う理由は熱力学第 2 法則そのものであり，その帰結として第 2 法則が破られないのは当然である．しかし，1 ビットの情報消去には少なくとも $k\ln 2$ のエントロピー増加が必要なこと自体は，第 2 法則を用いなくても導くことができる．興味ある読者は文献 [9] やレビュー論文 [10] 等を参照されたい．また，同様に $H(p)(<1)$ ビットの消去に必要なエントロピー増加は $k\ln 2H(p)$ となるが，これらは 0 と 1 のための体積が等しい (各状態の自由エネルギーが等しい) メモリー構成を前提としている．この前提により，可逆な情報処理についてはエントロピー・エネルギー変化を考慮する必要がなく，情報論的および熱力学的エントロピーの対応関係を議論するのに見通しがよくなる [11]．そもそも，熱力学におけるエントロピーは仕事などのマクロな量の観測によって定義されており [12]，確率分布を通した情報論的エントロピーとは直接の関係は明らかでない．Landauer の原理はその橋渡しの役を担っていると言える．

III. 量子系に記録された情報

今度は量子系を (古典) 情報の記録・処理媒体として考えよう．量子系に情報を記録する (エンコードする) とは，情報 (アルファベット)$\{i_1, i_2, ..., i_N\}$ を，量子状態 $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N\}$ にそれぞれ対応させることである．各 ρ_n は量子状態を記述する密度演算子である．各々の情報 i_n が現れる確率を p_n とし，量子状態 ρ_n が確率 p_n で現れる系を，$\{p_n, \rho_n\}$ と表記しよう．情報の受け手にとっては，観測する前には受け取った量子状態がどの情報に対応するか分からないから，どれも ρ_n を “平均” した量子状態

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i \rho_i \tag{3}$$

にあると考えることができる．

状態 $\{p_n, \rho_n\}$ に載せられた情報を消去するのには，どれだけのエントロピー増加が必要であろうか．分子の位置で情報を記録した場合と異なり，この場合は壁を抜いて自然に非可逆な過程を起こさせるようなことができない上，等温圧縮のような熱力学的過程をそのまま考えることも無理がある．そこで，ρ_i を，ある温度 T の熱浴との接触により，(温度 T での) 熱平衡状態 $\omega = e^{-\beta H}/Z$ にしてしまうときの全系のエントロピー変化を計算する．H は熱浴とメモリーの各構成粒子を記述するハミルトニアン，$\beta = (kT)^{-1}$，Z は分配関数である．まず結果だけを示すと，エントロピー変化は，次式

$$S(\rho) := -\mathrm{Tr}(\rho \log_2 \rho) \tag{4}$$

で定義された **von Neumann エントロピー**を用いて

$$k\ln 2\left(S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i)\right) \tag{5}$$

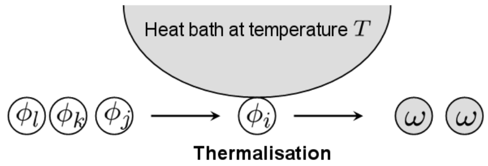

FIG. 3: 熱浴との相互作用による情報の消去.

と表される．式 (5) を $k\ln 2$ の後のカッコ内の量はしばしば $\chi(\rho)$ と表記される．各 ρ_i が互いに直交，つまり $i \neq j$ に対して $\mathrm{Tr}[\rho_i \rho_j] = 0$ となるときは，$\chi(\rho) = H(p_i)$ となる [22]．互いに直交する ρ_i はすべて確率 1 で区別可能であるから，これは上述の古典的な状況に対応し，消去によるエントロピー増加は Shannon エントロピー $H(p_i)$ に $k\ln 2$ をかけたものになる．

量子状態 $\{p_i, \rho_i\}$ にエンコードされた情報を消去する方が，同じ確率分布を持つ古典的状態にエンコードされた情報を消去するよりも，エントロピー増加が小さい．つまり，ρ には $H(p_i)$ ビットよりも小さい情報量しか持たせられない．これは，異なる i と j に対して ρ_i と ρ_j が直交しない場合，それらを観測によって完全には区別できないという重要な事実に由来する．区別できない → 観測しても得られる情報が少ない → エントロピーが小さい，となるわけである．

では，Lubkin の流儀 [14] にしたがって式 (5) を導いてみよう．上述したように，量子 ‘気体’ を操る代わりに，温度 T の十分に大きい熱浴と情報を保持したメモリー系を相互作用させ，メモリーの状態を熱浴の状態と同じにしてしまうことで情報を消去する (図 3)．このままでは最終的なメモリー状態が混合状態 ω となり，Landauer 流に消去を定義したときのような，きれいにリセットされた (純粋) 状態にならない．しかし，温度 T を十分に低くすれば，$\omega = e^{-E_0/kT}|0\rangle\langle 0| + e^{-E_1/kT}|1\rangle\langle 1| + ...$ のうちのもっともエネルギーの低い基底状態 $|0\rangle\langle 0|$ の項が他と比べて圧倒的に大きくなり，純粋状態とみなせる．

全系のエントロピー変化は，メモリーと熱浴のエントロピー変化の和 $\Delta S_{\mathrm{total}} = \Delta S_{\mathrm{memory}} + \Delta S_{\mathrm{bath}}$ である．メモリーのエントロピーは，初めの状態が ρ_i とすれば，

$$\Delta S^{(i)}_{\mathrm{memory}} = k\ln 2(S(\omega) - S(\rho_i)) \tag{6}$$

だけ変化する．熱浴のエントロピー変化は，熱浴とメモリーとの間でやりとりするエネルギーを温度で割ればよい:

$$\begin{aligned}\Delta S_{\mathrm{bath}} &= \frac{\Delta Q_{\mathrm{bath}}}{T} = -\frac{\Delta Q_{\mathrm{memory}}}{T} \\ &= -\frac{\mathrm{Tr}(\omega H) - \mathrm{Tr}(\rho H)}{T} \\ &= k\mathrm{Tr}[(\omega - \rho)\ln(Z\omega)] \\ &= -k\ln 2[S(\omega) + \mathrm{Tr}(\rho \log_2 \omega)].\end{aligned} \tag{7}$$

2 行目から 3 行目への変形では，$H = -kT\ln(Z\omega)$ を使った．式 (6) と式 (7) より，(von Neumann エントロピーと熱力学的エントロピーの間の変換係数 $k\ln 2$ は 1 として)

$$\Delta S_{\mathrm{total}} = \sum_i p_i \Delta S^{(i)}_{\mathrm{memory}} + \Delta S_{\mathrm{bath}}$$

$$= -\sum_i p_i S(\rho_i) - \mathrm{Tr}[\rho \log_2 \omega]$$
$$\geq S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (8)$$

最後の不等号は (量子) 相対エントロピーの非負性 $S(\rho||\omega) = -S(\rho) - \mathrm{Tr}[\rho \log_2 \omega] \geq 0$ による．

ところで，von Neumann エントロピーの表式 (4) は，Shannon による情報理論的エントロピーの式 (1) によく似ているが，(4) の定義の動機は熱力学であって，情報理論ではない．Von Neumann は，直交する量子状態をもつ気体分子を異なる種類の分子とみなしたときの，混合気体のもつエントロピーが熱力学的エントロピーと等しくなるように量子系のエントロピー (4) を定義した．Shannon に式 (1) を「エントロピー」とよぶよう提案したのは von Neumann だったそうである．

IV. 量子データ圧縮と HOLEVO 限界

pN 個の 0 と $(1-p)N$ 個の 1 からなる長さ N のビット列は，N が十分大きいとき，長さ $NH(p)$ の短いビット列へと情報を失うことなく圧縮することができる．データ圧縮に関する Shannon の符号化定理をかなり大雑把に言うとこうなる [23]．これに対応する（無雑音）量子符号化定理も存在する [16]:Hilbert 空間 H 上の量子状態 ρ を生成する i.i.d. 量子情報源（i.i.d.=independent and identically distributed, 独立同分布）があるとする．圧縮率 R が $R > S(\rho)$ を満たすときは，復元可能な量子データ圧縮が可能である．

たとえば，Hilbert 空間 $H^{\otimes N}$ 上の状態 $\rho^{\otimes N}$ が与えられたとすると，圧縮とは 2^{nR} 次元の空間上の状態へ可逆に変換することである．$\rho^{\otimes N}$ を nR 個の量子ビット (qubit) の状態へ変換することと言ってもいい．そして，この R の下限が von Neumann エントロピー $S(\rho)$ で与えられることになる．

さて，この量子符号化定理を，Landauer の消去原理の視点で見てみよう．状態 ρ の列を得るということは，$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ となるような $|\psi_i\rangle$ が確率 p_i で現れる状態の集合があることとみなせる．純粋状態のエントロピーはゼロなので，この状態に記録された情報を消去するのに必要なエントロピー増加は，上の議論から $k \ln 2 S(\rho)$ である．そこで，量子状態 $\rho^{\otimes n}$ を圧縮して，$n(S(\rho) - \epsilon)$ 個の量子ビット ($\epsilon > 0$) に変換できたとしよう．圧縮 (符号化) の結果できる文字列 (量子ビット列) はどれも等しい確率で現れるはずだから (でなければ，さらなる圧縮が可能である)，ρ を変換した結果の各量子ビットは，互いに直交する二状態，$|0\rangle$ と $|1\rangle$，が等しい確率 1/2 で現れる混合状態 $\omega = 1/2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ になっている．

状態 ω にある $n(S(\rho)-\epsilon)$ 個の量子ビットが保持する情報を消去するのに必要なエントロピー増加は，$nk \ln 2(S(\rho) - \epsilon)$ となり，$nk \ln 2S(\rho)$ より小さい．ところが，Landauer の消去原理により，状態 $\rho^{\otimes n}$ 中の情報を消去するには少なくとも $k \ln 2S(\rho)$ だけのエントロピー増加が必要なはずである．我々は可逆な圧縮を考えており，圧縮の前後で系が保持する情報量に変化はないから，これは矛盾だ．したがって，量子データ圧縮がもっとも効率よく実現できるときの圧縮率は von Neumann エントロピーで与えられることが，消去原理からも分かる．

次に少し違うシナリオを考えてみる．量子状態 ρ_i が確率 p_i で現れる系，$\{p_i, \rho_i\}$，にはどれだけの（古典）情報量を保持させることができるだろうか．この上限は，Holevo 限界とよばれる重要な量である．アルファベット $\{i\}$ を量子状態 $\{\rho_i\}$ でエンコードしたとき，最適な観測（復号化）によって得られる情報量と言ってもよい．

これは前節で扱った設定とまったく同じであるので，受け取った量子状態 $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ 中の情報を消去するのに必要なエントロピー増加は $\chi(\rho) = S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i)$ である．逆に見れば，状態 ρ には最大で $\chi(\rho)$ だけの情報量を持たせることができる，とも解釈できる．

実際，$\{\rho_i\}$ を生成する送信者 A とそれを受け取って観測する受信者 B 間で共有できる情報量 $I(A:B)$ の上限は $\chi(\rho)$ で与えられ，任意の (POVM) 観測を認める条件下で Holevo によって厳密に証明された [17]．ここで述べたものはあくまで Holevo 限界の簡易な正当化であり，厳密な意味での導出ではない．とは言え，情報消去の視点からも同じ形の χ が正当化されるのは興味深い．

V. 最後に

Maxwell の悪魔のパラドックスは，情報と物理が密接に関係していることを示してくれた．Landauer の原理，情報消去過程を通して，情報論的エントロピーと熱力学エントロピーの同一視が正当化される．その結果，様々な物理現象を情報の視点から眺めたり，また逆のこともできるようになる．本稿ではその一端を紹介した．

情報消去に必要な仕事量 $kT \ln 2$ の実験的検証は，この値の小ささもあり，未だなされていない．しかし，近年 Szilard エンジンの実験は可能になり，ニュースにもなった．微小な系の kT オーダーの熱ゆらぎを直接観測，その情報を自由エネルギーに変換してみせたのだ [18, 19]．近い将来，簡単な情報処理の可逆性・不可逆性が物理量として観測されることになるかもしれない．

さらに，統計力学の中での情報（情報論的な意味での）位置づけも曖昧さが残る．最大エントロピー原理 [20] により，情報エントロピーから Boltzmann 分布を求めることは可能なものの，情報理論的および物理的エントロピーの普遍的な関連ははっきりしない．

量子情報理論や量子力学基礎論での情報の根源的役割も，その研究は緒についたばかりだ．今後，情報と物理の織り成す鮮やかな世界がますます明らかになっていくことだろう．悪魔はまだどこかで笑っているかもしれないのだ．

---

[1] H. S. Leff and A. F. Rex, *Maxwell's Demon 2* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003).
[2] 分子ひとつだけの気体に P や T などを含む通常の状態方程式が適用できるのか，という疑問がわくかもしれない．しかし，Szilard エンジンの議論については，これを正当化できる．それを説明するには，残念ながら紙面が足りない….

[3] L. Szilard, Z. Phys. **53**, 840 (1929). 文献 [1] に英訳が収録されている．
[4] L. Brillouin, J. Appl. Phys. **22**, 334 (1951). 文献 [1] に収録.
[5] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **5**, 183 (1961). 文献 [1] に収録.
[6] J. D. Norton, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. **36**, 375 (2005).
[7] O. J. E. Maroney, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. **36**, 355 (2005).
[8] C. H. Bennett, Int. J. Theor. Phys. **21**, 905 (1982); IBM J. Res. Dev. **32**, 16 (1988)．共に文献 [1] に収録.
[9] K. Shizume, Phys. Rev. E **52**, 3495 (1995); B. Piechocinska, Phys. Rev. A **61**, 062314 (2000).
[10] K. Maruyama, F. Nori, and V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **81**, 1 (2009).
[11] A. Hosoya, K. Maruyama, and Y. Shikano, Phys. Rev. E **84**, 061117 (2011).
[12] 田崎晴明，熱力学–現代的な視点から，培風館　(2000)．
[13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
[14] E. Lubkin, Int. J. Theor. Phys. **26**, 523 (1987).
[15] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory,* John Wiley and Sons, New York, 1991.
[16] B. Schumacher, Phys. Rev. A **51**, 2738 (1995).
[17] 量子相対エントロピーの強加法性を用いたスマートな証明が，文献 [13] の Theorem 12.1 に解説されている．元の文献は，H. P. Yuen and M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. **70**, 363 (1993) である．
[18] S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Muneyuki, and M. Sano, Nature Phys. **6**, 988 (2010).
[19] 田崎晴明，日本物理学会誌，**66**，172 (2011).
[20] E. T. Jaynes, Phys. Rev. **106**, 620 (1957).
[21] たとえば，エネルギーや量子コヒーレンスの環境中への散逸や，統計力学における粗視化，量子力学における非局所性に関連した超光速通信の議論など.
[22] 証明は，たとえば，文献 [13] 中の Theorem 11.8.
[23] 詳細は標準的な教科書 [15] を参照.